Projet du F

par
Eric Buist

présenté à
Michel Guérin

Collège Édouard-Montpetit
Mathématiques
Cours 105, groupe 1570
13 décembre 1999

Liste des liens

1–2	2–3	3–4	4–5	5–6
6–7	7–8	8–9	9–10	1–10
11–12	12–13	13–14	14–15	15–16
16–17	17–18	18–19	19–20	11–20
1–11	2–12	3–13	4–14	5–15
6–16	7–17	8–18	9–19	10–20

Choix de l'œil

Soit le point $Q : (-1, 5, -1)$ l'œil de l'obsvervateur imaginaire de la figure.

Calcul du centre arithmétique du F

$$\begin{aligned}
C &= \overline{\text{points du F}} \\
C &= [(0,0,0) + (0,1,0) + (0,1,2) + (0,2,2) + (0,2,3) + (0,1,3) + (0,1,4) \\
&\quad +(0,3,4) + (0,3,5) + (0,0,5) + (1,0,0) + (1,1,0) + (1,1,2) + (1,2,2) \\
&\quad +(1,2,3) + (1,1,3) + (1,1,4) + (1,3,4) + (1,3,5) + (1,0,5)]/20 \\
C &= \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{5}, \frac{14}{5}\right) = (0.5, 1.4, 2.8)
\end{aligned}$$

Choix du plan-rétine

Le vecteur normal du plan partira du centre du F pour passer par l'oeil.

$$\begin{aligned}
\vec{n} &= C - Q \\
\Rightarrow \vec{n} &= \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{5}, \frac{14}{5}\right) - (-1, 5, -1) \\
\Rightarrow \vec{n} &= \left(\frac{3}{2}, -\frac{18}{5}, \frac{19}{5}\right) \\
&= \left(\frac{15}{10}, -\frac{36}{10}, \frac{38}{10}\right)
\end{aligned}$$

$\vec{n} = (15, -36, 38)$, puisqu'on peut multiplier un vecteur par une constante sans changer sa direction. Ainsi,

$$\pi : 15x - 36y + 38z + d = 0$$

Pour que l'image entière se projette sur le plan, il faut qu'il se trouve en arrière du F. Tous les points doivent se trouver entre l'œil et le plan. Si on fait passer π par $(-1, -1, -1)$, on remplit cette condition. Une distance entre le plan et l'origine permettra d'agrandir la figure lors de la projection. Ce qui rendra le résultat final plus visible sans appliquer de transformation supplémentaire.

$$\begin{aligned} 15 * -1 - 36 * -1 + 38 * -1 + d &= 0 \\ \Rightarrow d &= 17 \\ &\pi : 15x - 36y + 38z + 17 = 0 \end{aligned}$$

Calcul des droites-rayons de chaque point

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \vec{OP}_1 + k\vec{a} \\ \Rightarrow (x, y, z) &= (-1, 5, -1) + k((P_x, P_y, P_z) - (-1, 5, -1)) \\ \text{Pour } \Delta_{20}(x, y, z) &= (-1, 5, -1) + k((1, 0, 5) - (-1, 5, -1)) \\ \Rightarrow (x, y, z) &= (-1, 5, -1) + k(2, -5, 6) \end{aligned}$$

Δ_1: $(x,y,z)=(-1,5,-1)+k(1,-5,1)$
Δ_2: $(x,y,z)=(-1,5,-1)+k(1,-4,1)$
Δ_3: $(x,y,z)=(-1,5,-1)+k(1,-4,3)$
Δ_4: $(x,y,z)=(-1,5,-1)+k(1,-3,3)$
Δ_5: $(x,y,z)=(-1,5,-1)+k(1,-3,4)$
Δ_6: $(x,y,z)=(-1,5,-1)+k(1,-4,4)$
Δ_7: $(x,y,z)=(-1,5,-1)+k(1,-4,5)$
Δ_8: $(x,y,z)=(-1,5,-1)+k(1,-2,5)$
Δ_9: $(x,y,z)=(-1,5,-1)+k(1,-2,6)$
Δ_{10}: $(x,y,z)=(-1,5,-1)+k(1,-5,6)$
Δ_{11}: $(x,y,z)=(-1,5,-1)+k(2,-5,1)$
Δ_{12}: $(x,y,z)=(-1,5,-1)+k(2,-4,1)$
Δ_{13}: $(x,y,z)=(-1,5,-1)+k(2,-4,3)$
Δ_{14}: $(x,y,z)=(-1,5,-1)+k(2,-3,3)$
Δ_{15}: $(x,y,z)=(-1,5,-1)+k(2,-3,4)$
Δ_{16}: $(x,y,z)=(-1,5,-1)+k(2,-4,4)$
Δ_{17}: $(x,y,z)=(-1,5,-1)+k(2,-4,5)$
Δ_{18}: $(x,y,z)=(-1,5,-1)+k(2,-2,5)$
Δ_{19}: $(x,y,z)=(-1,5,-1)+k(2,-2,6)$
Δ_{20}: $(x,y,z)=(-1,5,-1)+k(2,-5,6)$

Calcul des points d'intersection

$$\begin{aligned}
\Delta_i : (x,y,z) &= (-1,5,-1)+k(a_x,a_y,a_z)\\
\Delta_i : &\quad \begin{cases} x=-1+k*a_x \\ y=5+k*a_y \\ z=-1+k*a_z \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi : 15x-36y+38z+17 &= 0\\
\Rightarrow 15*(-1+k*a_x)-36*(5+k*a_y)+38*(-1+k*a_z)+17 &= 0\\
\Rightarrow 15k*a_x-36k*a_y+38k*a_z-216 &= 0\\
\Rightarrow k*(15a_x-36a_y+38a_z) &= 216\\
\Rightarrow k=\frac{216}{15a_x-36a_y+38a_z}
\end{aligned}$$

Calculons le point d'intersection ($P_{i(n)}$) pour le point 20.

$$\begin{aligned}
k &= \frac{216}{15*2-36*-5+38*6} = \frac{36}{73} \\
x_i &= -1+2*\frac{36}{73} = -\frac{1}{73} \\
y_i &= 5+-5*\frac{36}{73} = \frac{185}{73} \\
z_i &= -1+6*\frac{36}{73} = \frac{143}{73}
\end{aligned}$$

$P_{i(1)} : (-17/233, 85/233, -17/233)$	$P_{i(2)} : (19/197, 121/197, 19/197)$
$P_{i(3)} : (-19/91, 167/91, 125/91)$	$P_{i(4)} : (-7/79, 179/79, 137/79)$
$P_{i(5)} : (-59/275, 727/275, 589/275)$	$P_{i(6)} : (-95/311, 691/311, 553/311)$
$P_{i(7)} : (-133/349, 881/349, 731/349)$	$P_{i(8)} : (-61/277, 953/277, 803/277)$
$P_{i(9)} : (-11/35, 127/35, 109/35)$	$P_{i(10)} : (-23/47, 115/47, 97/47)$
$P_{i(11)} : (23/31, 20/31, -4/31)$	$P_{i(12)} : (55/53, 49/53, 1/53)$
$P_{i(13)} : (1/2, 2, 5/4)$	$P_{i(14)} : (5/7, 17/7, 11/7)$
$P_{i(15)} : (71/145, 401/145, 287/145)$	$P_{i(16)} : (53/163, 383/163, 269/163)$
$P_{i(17)} : (17/91, 239/91, 179/91)$	$P_{i(18)} : (35/73, 257/73, 197/73)$
$P_{i(19)} : (17/55, 203/55, 161/55)$	$P_{i(20)} : (-1/73, 185/73, 143/73)$

Construction d'une base $< \vec{a}, \vec{b} >$

La base aura en fait une composante $\vec{c}$ qui ne servira pas dans le calcul des points bidimensionnels. Cette composante doit partir du plan pour aller vers les points de l'objet. Elle correspond, dans le cas de notre plan-rétine, à l'opposé de la normale. La base doit être orthonormée et similaire à la base $< \vec{i}, \vec{j} >$ du plan afin de ne pas déformer la figure finale. Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ doivent donc être unitaires et perpendiculaires. De plus, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} = -\vec{n}$. Nous pouvons, par la règle de la main droite, trouver un vecteur qui équivaut au vecteur $\vec{i}$ dans la base orthonormée.

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \vec{j} \times \vec{c} \\
\Rightarrow \vec{v} &= (0,1,0) \times (-15,36,-38) \\
\Rightarrow \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ -15 & 36 & -38 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{v} \;=\; -38\vec{i} + 15\vec{k} = (-38, 0, 15)$$

Il faut ensuite rendre le vecteur $\vec{v}$ unitaire pour obtenir $\vec{a}$.

$$\begin{aligned}
|\vec{v}| &= \sqrt{(-38)^2 + 0^2 + 15^2} = \sqrt{1669} \\
\vec{a} &= \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \\
\Rightarrow \vec{a} &= \left(-\frac{38}{\sqrt{1669}}, 0, \frac{15}{\sqrt{1669}}\right)
\end{aligned}$$

Pour calculer $\vec{b}$, on peut repartir de $\vec{v}$, puisque seule sa direction compte dans le calcul de la base. Par la règle de la main droite, on peut trouver le produit vectoriel qui permet de calculer le vecteur perpendiculaire à la fois à la normale du plan et à $\vec{a}$.

$$\begin{aligned}
\vec{w} &= \vec{c} \times \vec{v} \\
\Rightarrow \vec{w} &= (-15, 36, -38) \times (-38, 0, 15) \\
\Rightarrow \vec{w} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -15 & 36 & -38 \\ -38 & 0 & 15 \end{vmatrix} \\
\Rightarrow \vec{w} &= 540\vec{i} + 1444\vec{j} + 225\vec{j} + 1368\vec{k} \\
\Rightarrow \vec{w} &= (540, 1669, 1368)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\vec{w}| &= \sqrt{540^2 + 1669^2 + 1368^2} = \sqrt{4948585} \\
\vec{b} &= \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} \\
\Rightarrow \vec{b} &= \left(\frac{540}{\sqrt{4948585}}, \frac{1669}{\sqrt{4948585}}, \frac{1368}{\sqrt{4948585}}\right)
\end{aligned}$$

Calcul des coordonnées 2D de tous les points d'intersection

Soit $\vec{OP} = (x, y, z)$ un vecteur reliant l'origine de l'espace et un point d'intersection quelconque et (r, s), le vecteur correspondant dans la base $<$

$\vec{a}, \vec{b} >$. Par la loi de Chales, on peut décomposer $\vec{OP}$ comme suit :

$$\vec{OP} = \vec{OP_o} + r\vec{a} + s\vec{b}$$

Le vecteur $\vec{OP_o}$ correspond à un point reliant l'origine et un point du plan. Nous choisirons le premier point d'intersection du F pour nous assurer que la figure sera proche de l'origine dans le dessin final.

$$r\vec{a} + s\vec{b} = \vec{OP} - \vec{OP_o} \Rightarrow r\vec{a} + s\vec{b} = (x + 17/233, y - 85/233, z + 17/233)$$

$$\begin{array}{rcl} r\left(-\frac{38}{\sqrt{1669}}, 0, \frac{15}{\sqrt{1669}}\right) \\ +s\left(\frac{540}{\sqrt{4948585}}, \frac{1669}{\sqrt{4948585}}, \frac{1368}{\sqrt{4948585}}\right) & = & \left(x + \dfrac{17}{233}, y - \dfrac{85}{233}, z + \dfrac{17}{233}\right) \\ \Rightarrow \left(-r\frac{38}{\sqrt{1669}} + s\frac{540}{\sqrt{4948585}}\right., \\ s\frac{1669}{\sqrt{4948585}}, & = & \left(x + \dfrac{17}{233}, y - \dfrac{85}{233}, z + \dfrac{17}{233}\right) \\ \left. r\frac{15}{\sqrt{1669}} + s\frac{1368}{\sqrt{4948585}}\right) \end{array}$$

On met le système d'équations résultant dans une matrice augmentée.

$$\begin{pmatrix} -\frac{38}{\sqrt{1669}} & \frac{540}{\sqrt{4948585}} & \vdots & x + \frac{17}{233} \\ 0 & \frac{1669}{\sqrt{4948585}} & \vdots & y - \frac{85}{233} \\ \frac{15}{\sqrt{1669}} & \frac{1368}{\sqrt{4948585}} & \vdots & z + \frac{17}{233} \end{pmatrix}$$

$$\overset{l2 \leftrightarrow l3}{\sim} \begin{pmatrix} -\frac{38}{\sqrt{1669}} & \frac{540}{\sqrt{4948585}} & \vdots & x + \frac{17}{233} \\ \frac{15}{\sqrt{1669}} & \frac{1368}{\sqrt{4948585}} & \vdots & z + \frac{17}{233} \\ 0 & \frac{1669}{\sqrt{4948585}} & \vdots & y - \frac{85}{233} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} s & = & \dfrac{y - \frac{85}{233}}{\frac{1669}{\sqrt{4948585}}} \\ r_1 & = & \dfrac{x + \frac{17}{233} - \frac{540}{\sqrt{4948585}}s}{-\frac{38}{\sqrt{1669}}} \\ r_2 & = & \dfrac{z + \frac{17}{233} - \frac{1368}{\sqrt{4948585}}s}{\frac{15}{\sqrt{1669}}} \end{array}$$

On peut trouver r de deux façons différentes. Si les vecteurs sont bien coplanaires, les deux valeurs devraient être égales. Calculons les coefficients pour le point 20.

$$\begin{aligned}
s &= \frac{\frac{185}{73} - \frac{85}{1}}{\frac{1669}{\sqrt{4948585}}} \\
&= \frac{18905}{6538} \\
r_1 &= \frac{-\frac{1}{73} + \frac{17}{233} - \frac{540}{\sqrt{4948585}} * 2.89\ldots}{-\frac{38}{\sqrt{1669}}} \\
&= \frac{38}{55} \\
r_2 &= \frac{\frac{143}{73} + \frac{17}{233} - \frac{1368}{\sqrt{4948585}} * 2.89\ldots}{\frac{15}{\sqrt{1669}}} \\
&= \frac{38}{55}
\end{aligned}$$

Dans ce calcul, les deux valeurs exactes de r sont égales.

$P_1 : (0, 0)$	$P_2 : (-930/9751, 2801/8426)$
$P_3 : (4605/7004, 8186/4177)$	$P_4 : (1169/1724, 23136/9131)$
$P_5 : (1183/1252, 4553/1499)$	$P_6 : (3013/3363, 11027/4455)$
$P_7 : (4372/4039, 7786/2705)$	$P_8 : (10438/8499, 26277/6410)$
$P_9 : (10618/7613, 20537/4721)$	$P_{10} : (75/64, 4798/1729)$
$P_{11} : (-3175/4078, 176/471)$	$P_{12} : (-5032/5035, 5778/7745)$
$P_{13} : (-393/8327, 10261/4708)$	$P_{14} : (-1061/8257, 12645/4597)$
$P_{15} : (1349/5860, 26696/8343)$	$P_{16} : (1997/7610, 17183/6495)$
$P_{17} : (2301/4535, 15545/5157)$	$P_{18} : (3045/6044, 17077/4060)$
$P_{19} : (1529/2049, 1361/307)$	$P_{20} : (38/55, 18905/6538)$

Tracé du dessin final