

Les fractales

par
Jean-Sébastien Abella et Eric Buist

présenté à
René Maldonado

Collège Édouard-Montpetit
Projet d'intégration
Groupe 1110
17 avril 2000

Table des matières

INTRODUCTION.....	3
HISTORIQUE.....	4
LES DÉBUTS DES FRACTALES.....	6
LA COURBE DE KOCH.....	6
LES DIMENSIONS.....	9
<i>Technique d'auto-similarité.....</i>	<i>9</i>
<i>Technique du compas.....</i>	<i>11</i>
<i>La méthode du tricot.....</i>	<i>13</i>
MANDELBROT.....	13
NEWTON.....	19
BARNSLEY.....	25
APPLICATIONS SOCIALE ET SCIENTIFIQUE DES FRACTALES.....	31
CONCLUSION.....	32
ANNEXES.....	33
ANNEXE I : LES NOMBRES COMPLEXES.....	33
BIBLIOGRAPHIE.....	35

Introduction

La nature révèle des objets complexes d'une grande irrégularité. L'être humain tente constamment de percer les secrets de tels objets, d'en découvrir leurs lois et leurs propriétés. La géométrie euclidienne constitue la première tentative de description de la nature qui consiste à idéaliser les objets en les rapprochant de formes abstraites telles que le cube, la sphère, le cône, etc. Cette approximation permet une étude plus poussée des objets.

Certains phénomènes naturels demeurent inexplicables. La géométrie euclidienne ne convient pas pour représenter tous les objets naturels, car ces derniers ne s'avèrent jamais parfaits. Il devient essentiel d'étudier les irrégularités des formes pour les comprendre davantage. La géométrie euclidienne doit être remplacée par une nouvelle géométrie qui constitue celle des fractales, des objets irréguliers. Cette nouvelle théorie fait appel à de nouveaux moyens de représentation fournis entre autres par l'infographie.

À partir de la courbe de Koch et du concept de dimensions, Mandelbrot élabore sa théorie fractale et son célèbre ensemble. John Hubbard utilise un procédé similaire pour représenter les effets de la méthode Newton tandis que Barnsley invente le jeu du chaos permettant la construction par le hasard d'une fractale. Malgré le caractère récent de cette science, il existe quelques applications intéressantes de cette théorie.

Historique

Avant le XX^e siècle, seuls les phénomènes réguliers pouvaient être analysés. La turbulence des fluides et l'atmosphère, par exemple, restaient totalement obscurs pour la science. Ils constituaient des phénomènes irréguliers qui rebutaient tout scientifique. Le premier à découvrir un ordre dans ce chaos est Edward Lorenz, qui étudie la météorologie par simulation sur ordinateur. Ses observations aboutissent à la découverte que quelques décimales erronées peuvent affecter tout le résultat final. Ses recherches le mènent à penser qu'il existe des lois régissant des phénomènes météorologiques pourtant totalement imprévisibles. S'amorce alors l'étude du désordre qui porte le nom de théorie du chaos ou de dynamique non linéaire.

Benoît Mandelbrot, de son côté, se rend compte, en étudiant les fluctuations du prix du coton, que les variations, bien qu'imprévisibles, sont semblables pour de petites et de grandes périodes. L'invariance d'échelle ainsi découverte constitue l'origine de toute sa théorie. Koch et Sierpinski découvrent eux aussi des objets mathématiques qui possèdent cette propriété d'autosimilarité. Durant son travail chez IBM, il découvre, en analysant les bruits de signaux électriques transmetteurs de données entre ordinateurs, qu'il existe un ordre dans ces sources d'erreurs. Il retrouve là aussi une invariance d'échelle qui peut être modélisée par l'ensemble de Cantor.

Il étudie aussi le phénomène des dimensions, comme la pelote de laine qui constitue un point à zéro dimension, une sphère à trois dimensions ou un fil à une dimension selon la distance de l'observateur. Le cas de la longueur d'une côte qui devient plus grande chaque fois que l'on s'approche l'intéresse également. Il se rend compte qu'il peut attribuer à de pareils objets une dimension fractionnaire. Puisque la courbe de Koch et le triangle de Sierpinski ne peuvent pas être décrits par la géométrie euclidienne qui représente des objets par des équations, Mandelbrot invente une nouvelle géométrie pouvant représenter ces formes qui s'avèrent beaucoup proches de ce que l'on trouve dans la réalité. Il donne le nom de fractales à ce type d'objet, car ce mot descend de fractus qui signifie la cassure, l'irrégularité.

Les fractales permettent la description de nombreuses formes naturelles et les dimensions fractionnaires expliquent certaines propriétés des matériaux. Contrairement à la géométrie euclidienne, les figures sont créées par itération d'une fonction un très grand nombre de fois, ce qui rend leur reproduction manuelle fastidieuse. En partant des formes décrites par Gaston Julia dont les travaux avaient jusque-là été ignorés, Mandelbrot découvre un objet qui les relie toutes, comme un catalogue.

John Hubbard, en cherchant un moyen de faire réfléchir ses étudiants sur la méthode de Newton, a recours à une fractale créée par un processus semblable à celui utilisé pour l'ensemble de Mandelbrot. Ce qui lui permet de décou-

vrir la frontière complexe qui existe entre les racines de nombres qui, jusque-là, ne pouvait être soupçonnée.

De son côté, Michael Barnsley travaille sur un type différent de fractales. Ces dernières sont créées par un procédé aléatoire qui, à l'infini, donne un objet fractal. Il se rend compte que sa technique permet la reproduction des objets de Julia, comme celle de Mandelbrot.

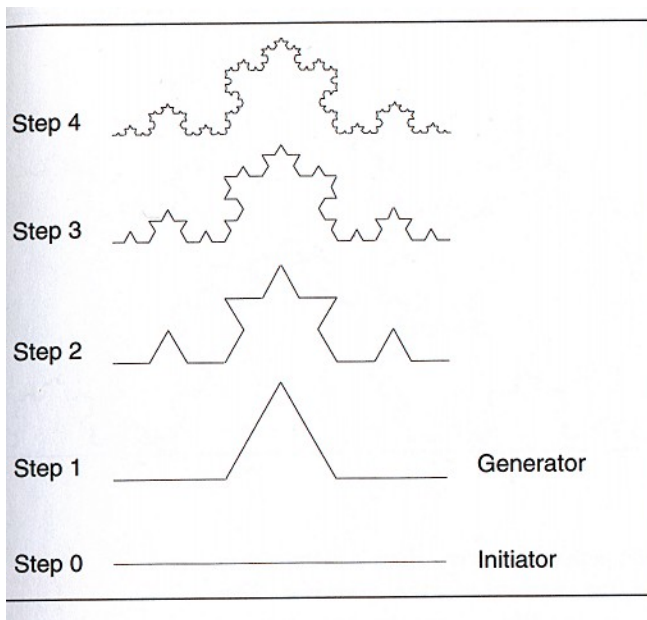
Les débuts des fractales

Les premières fractales n'étaient pas vraiment des fractales, elles étaient plutôt des expérimentations mathématiques. Ces objets constituaient pour les mathématiciens des erreurs ou des exceptions de la géométrie. Nous avons retracé ces formes à partir du XV^e siècle par Albrecht Dürer et un pentagone spécial. Beaucoup d'autres formes se sont ajoutées, jusqu'au tout début du XX^e siècle. En effet, Helge von Koch produit, en 1906, ce que l'on appelle désormais la courbe de Koch. Cette courbe est populaire, car elle permet de représenter facilement plusieurs propriétés des fractales. C'est pourquoi nous utiliserons cette dernière pour expliquer ces propriétés.

La courbe de Koch

La contribution de Koch à la science des mathématiques n'est pas très considérable, mais sa découverte nous permet d'étudier les fractales. Cette courbe n'est pas vraiment une courbe. Sa construction est simple. Il suffit d'appliquer à une ligne une infinité d'itérations. Voici la procédure : nous devons d'abord prendre un objet initiateur, une ligne par exemple. Puis on l'itère avec un

générateur qui transformera l'initiateur. Le générateur pour la courbe de Koch peut s'expliquer de cette façon : pour chaque initiateur(ligne) il faut retirer le deuxième tiers de la ligne et mettre à la place deux lignes de la même longueur que l'on a retirées et de les placés pour former un angle. Cette dernière étape s'appelle itération et c'est sa répétition qui produira la courbe. En voici une représentation ou l'on peut voir son évolution depuis l'initiateur(étape 0) jusqu'à la quatrième itération (étape 4)



Koch Curve Construction

The construction of the Koch curve proceeds in stages. In each stage the number of line segments increases by a factor of 4.

Figure 2.31

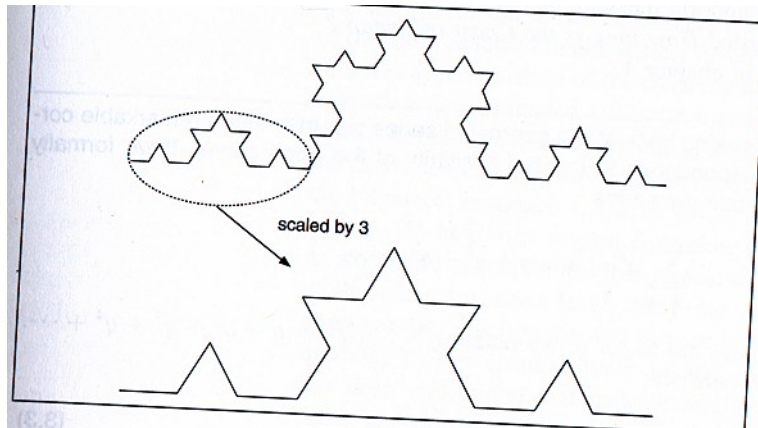
CRILLY, p. 91, fig. 2.31.

La courbe de Koch, à la base, n'était pas destinée à être une fractale. Koch, dans ses recherches, avait découvert cet objet mathématique purement par hasard. Mais c'est en analysant cette forme que l'on se rend compte qu'elle possède des propriétés spéciales. Par exemple, il est impossible de tracer une tangente à cette courbe. Cette propriété est très difficile à visualiser car nous ne sommes pas habitués à travailler avec des formes de cette complexité. Mais, en

effet, en tout point de cette courbe se trouve un coin, car toutes les lignes sont transformées en coin par itération.

Ce qui nous amène à la propriété que la courbe possède une longueur infinie. En effet, supposons que l'initiateur soit de longueur unitaire 1 alors après une itération la longueur calculée est de 4 lignes de longueur $1/3$ donc un total de $4/3$. Puis à la seconde itération, la longueur devient $16/9$ car les 4 lignes de longueurs $1/3$ deviennent 4 fois 4 lignes de longueur $1/9$. On peut en tirer la conclusion que pour n itération la longueur sera $(4/3)^n$ plus grand que la longueur initiale, or lorsque l'on fait tendre n vers l'infini nous découvrons que la longueur est infiniment grande. $(4/3)^\infty = \infty$

L'auto-similarité est aussi facilement observable. En fait, lors de la construction de la courbe nous pouvons observer cette caractéristique. Elle est le fait de retrouver la structure de base en tout endroit de la structure à tous niveaux de détails. Par exemple, si on se concentre sur une partie spécifique de la courbe, il sera aisément possible de reconnaître la structure de base. Il faut par contre spécifier que pour la courbe de Koch, elle doit être itérée un nombre infini de fois pour pouvoir observer cette propriété, sinon il n'y a pas d'auto-similarité. Par exemple après 3 itérations, nous pouvons observé que la partie encerclée n'est pas semblable à la forme entière.



CRILLY, p. 151, fig. 3.13.

Les dimensions

L'une des propriétés les plus intéressantes des fractales est leurs dimensions. En effet, on se rendra compte que, contrairement aux formes géométriques traditionnelles, les fractales n'ont pas des dimensions entières mais plutôt fractionnaires. La fraction peut laisser croire que ces objets se situent entre 2 dimensions. De plus, la signification de la dimension peut se traduire qualitativement par la complexité de la forme. C'est pourquoi les formes géométriques tel le cercle, le carré ou le triangle ont des dimensions entières contrairement aux dimensions fractales qui s'avèrent des fractions. Plus la partie décimale de la fraction se rapproche de 1, plus la forme aura beaucoup de détails comme les côtes d'un continent.

Technique d'auto-similarité

Dans la géométrie traditionnelle, il est possible d'expliquer les dimensions pour des structures auto-similaire en comparant un facteur de réduction et un nombre de sous-structure. Par exemple une ligne, en prenant un facteur de ré-

duction arbitraire tel $\frac{1}{2}$, nous pouvons exprimer la ligne par 2 fois la ligne réduite. Ainsi avec un carré que l'on réduirait du même facteur on pourrait exprimer le carré par quatre carrés réduits. Il se produirait la même chose avec un cube ou l'on aurait besoin de huit cubes.

Forme	Facteur de réduction	Nombre de forme produite
Ligne	$\frac{1}{2}$	2
Carré	$\frac{1}{2}$	4
Cube	$\frac{1}{2}$	8

Il découle de cette analyse la formule des dimension telle que pour un facteur r et un nombre n de formes produites. La dimension d est donné par :

$$n = \frac{1}{r^d} \text{ donc la dimension est } 1 \text{ pour la ligne, } 2 \text{ pour le carré et } 3$$

pour le cube.

Pour la courbe de Koch nous savons que $n = 4$ pour $r = 1/3$, donc d est égal à $\log 4 / \log 3$.

The Koch Collage

The Koch curve is invariant under the transformations w_1 to w_4 .

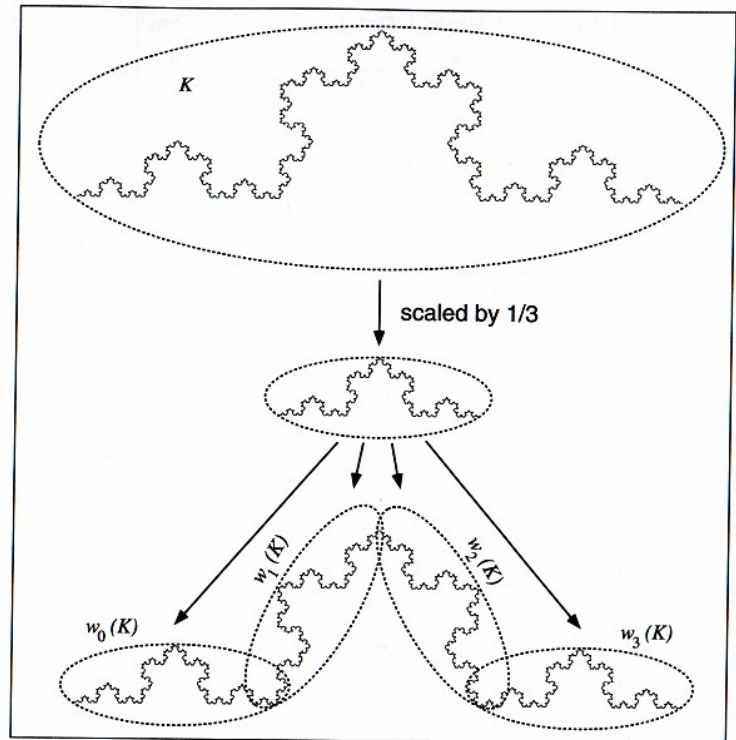


Figure 3.22

CRILLY, p. 170, fig. 3.22.

Cette technique est très utile lorsque nous avons des structures auto-similaires. Or la plupart des fractals naturels ne sont pas auto-similaires comme la courbe de Koch. Effectivement, les limites d'une île géographique telle l'Angleterre n'est pas calculable de cette façon c'est pourquoi l'on utilise d'autres techniques.

Technique du compas

Cette technique ressemble un peu à la précédente et est surtout utilisée pour calculer la dimension de courbes irrégulières telles des limites géographiques. La technique consiste à calculer la longueur de la courbe en utilisant différentes unités de mesure. Puis de faire un graphique logarithmique de la lon-

gueur calculée en fonction de la longueur du compas utilisé. Pour un cercle de diamètre 10 nous avons les résultats suivant :

Long. du compas	Long. Calculé	Log compas	Log calculé
10.0	30.0	1.00000	1.47712
2.5	30.0	0.39794	1.47712
1.0	31.0	0.00000	1.49136
0.5	31.5	-0.03010	1.49831

Donc, la pente donnée par le graphique log/log est très proche de 0, mais si nous le comparons à la carte géographique de la frontière anglaise nous avons ceci :

Long. du compas	Long. Calculé	Log compas	Log calculé
500	2600	2.69897	3.41497
100	3800	2.00000	3.57978
50	5700	1.69897	3.75587

Ici, la pente est plus grande, soit environ 0.36. Ce qui s'explique par le fait que plus le compas est petit et plus nous pouvons ajouter des détails au calcul de la longueur.

Il est aussi possible d'appliquer cette technique sur la courbe de Koch. Pour ce faire, prenons 1 pour la longueur de l'initiateur. Nous aurons donc :

Long. du compas	Long. Calculé	Log compas	Log calculé
1	1	0.00000	0.00000
1/3	4/3	-0.47712	0.12494
1/9	16/9	-0.95424	0.24987
1/27	64/27	-1.43136	0.37482

Ce qui donne environ une pente 0,26. Ici, nous pouvons remarquer qu'en ajoutant 1 à ce résultat, nous obtenons le même résultat que celui calculé avec la première méthode, soit $\log 4 / \log 3$, environ 1,2619. Ceci n'est pas une coïncidence, car il faut en effet ajouter 1 pour obtenir la dimension. Si nous comparons les dimensions des trois courbes, nous pouvons ainsi dire que le cercle est une forme plus simple que la courbe de Koch et que celui-ci à une courbe plus simple que celle de l'Angleterre.

La méthode du tricot

Cette méthode consiste à appliquer différents quadrillages sur la fractale et de calculer pour chaque grillage le nombre de carré dans lequel il y a une trace de la fractale. Les grillages doivent être de différentes échelles. Cette technique s'apparente à la dernière, car l'on peut s'imaginer que si l'on utilise un grillage de plus en plus petit, les carrées seront une approximation de la taille de la courbe. La méthode pour trouver la dimension reste la même et il s'agit de calculer la pente dans un graphique logarithmique. Cette méthode est très utilisée, car elle est programmable pour un ordinateur qui parvient à faire les calculs très rapidement.

Mandelbrot

Mandelbrot reprend les travaux de Gaston Julia, né en 1893 et célèbre pour son livre *Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles*, qui avaient perdu leur intérêt, ainsi que les concepts de dimensions fractionnaires pour élaborer sa théorie. Sa collaboration avec IBM permet le développement de ses recherches puisqu'on le laisse choisir la direction dans laquelle il veut approfondir son étude.

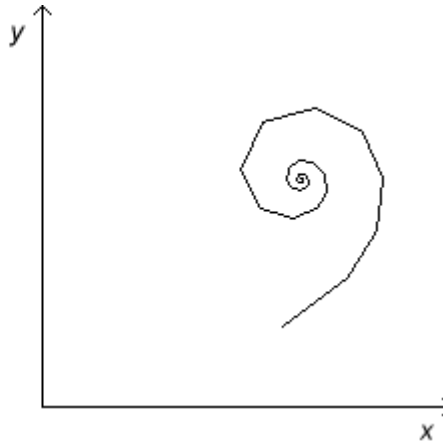
L'Infographie lui permet de représenter le travail de Julia sous forme de fractales qui s'avèrent les plus belles de celles qu'on a pu créer.

En observant la courbe, apparemment un objet purement mathématique, en constatant la possibilité de dimensions fractionnaires, ainsi qu'en étudiant le triangle de Sierpinski, que nous observerons un peu dans la section sur le jeu du chaos, Mandelbrot parvient à la conclusion que la géométrie euclidienne ne suffit pas à représenter toutes les formes de la réalité. Par cette constatation, il fonde sa propre géométrie, celle des fractales.

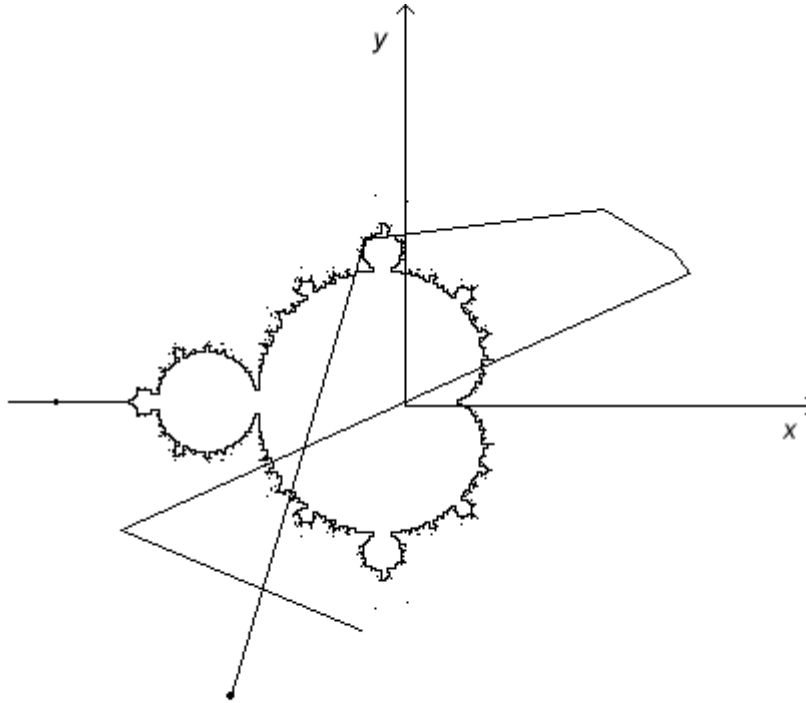
La fractale qu'il développe est aujourd'hui devenue un classique. Une fonction $f(z)$, où z est un nombre complexe, est itérée un grand nombre de fois. (voir annexe I sur les nombres complexes) Dans les réels, un nombre élevé au carré de façon répétée diverge vers l'infini aussitôt qu'il est plus grand que 1 ou plus petit que -1 . Dans le cas contraire, la mise au carré le fait tendre vers 0. Le calcul dans les nombres complexes n'obéit plus à cette simple loi, la mise au carré impliquant deux composantes, le nombre réel et imaginaire. On dit alors qu'un point atteindra l'infini si sa distance à l'origine dépasse une certaine valeur, comme 2.

L'image la plus classique, nommée ensemble de Mandelbrot en l'honneur de son inventeur, est obtenue par la fonction $Z_{n+1}(z_n) = (z_n)^2 + z_0$, où z_0 est le point évalué lors de la première itération durant laquelle $z_n = z_0$. Comme le montre la fi-

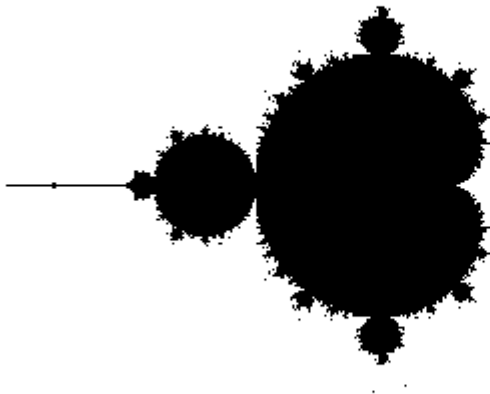
gure ci-dessous, pour un point se trouvant à l'intérieur de l'ensemble, comme $(0.3, 0.1)$, la trajectoire formée par chaque point résultant d'une itération de la fonction reste prisonnière dans une zone finie.



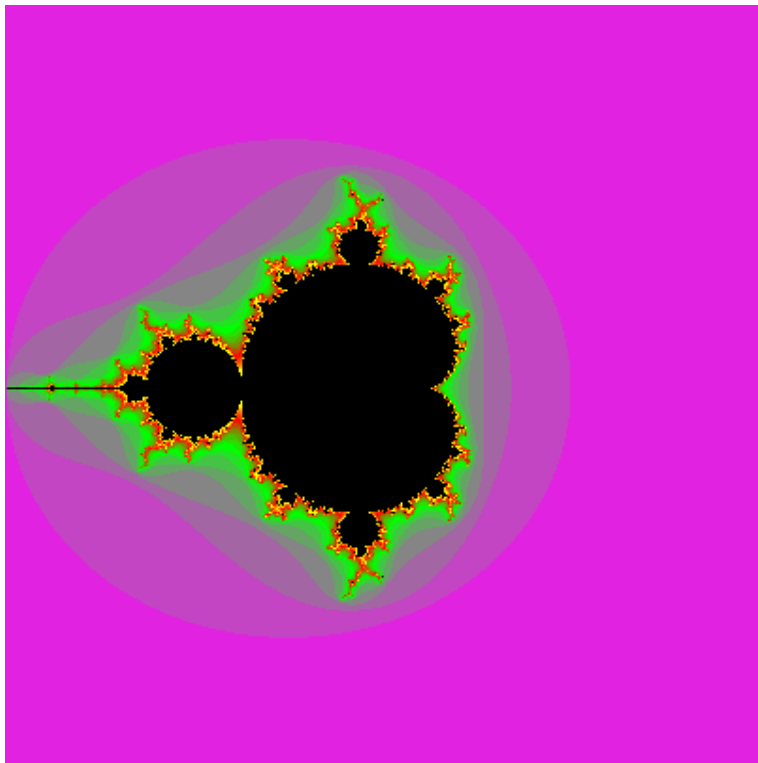
Si on prend un point à l'extérieur de l'ensemble, on obtient une trajectoire très différente. Sur le dessin qui suit, le point noir indique le moment où la trajectoire est sortie de la zone de rayon 2 que nous avons choisie comme zone dans laquelle les points sont considérés finis. Le trajet part ici du point $(-0.22, -1.12)$. Le nombre d'itérations nécessaires pour la divergence vers l'infini varie en fonction de la position des points, comme en témoignent les couleurs de l'ensemble. Nous avons choisi un point assez proche de l'ensemble pour nécessiter un nombre d'itérations assez grand pour obtenir une trajectoire intéressante.



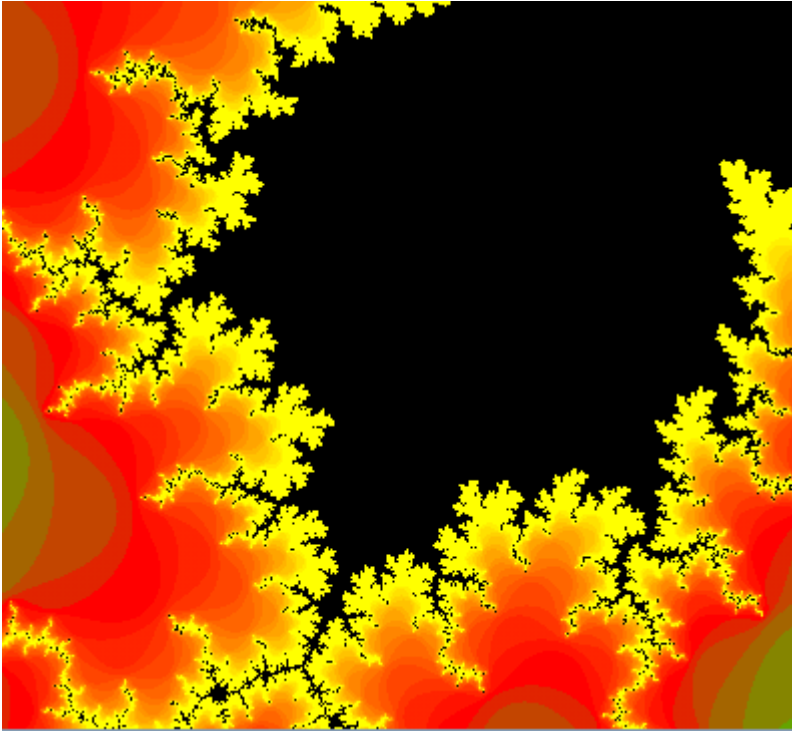
Il serait long et fastidieux de tracer un tel ensemble à la main, mais un ordinateur peut le faire à un rythme convenable. On colore en noir les points qui font partie de l'ensemble et en blanc, tous les autres points. La forme obtenue est à la fois complexe et fascinante.



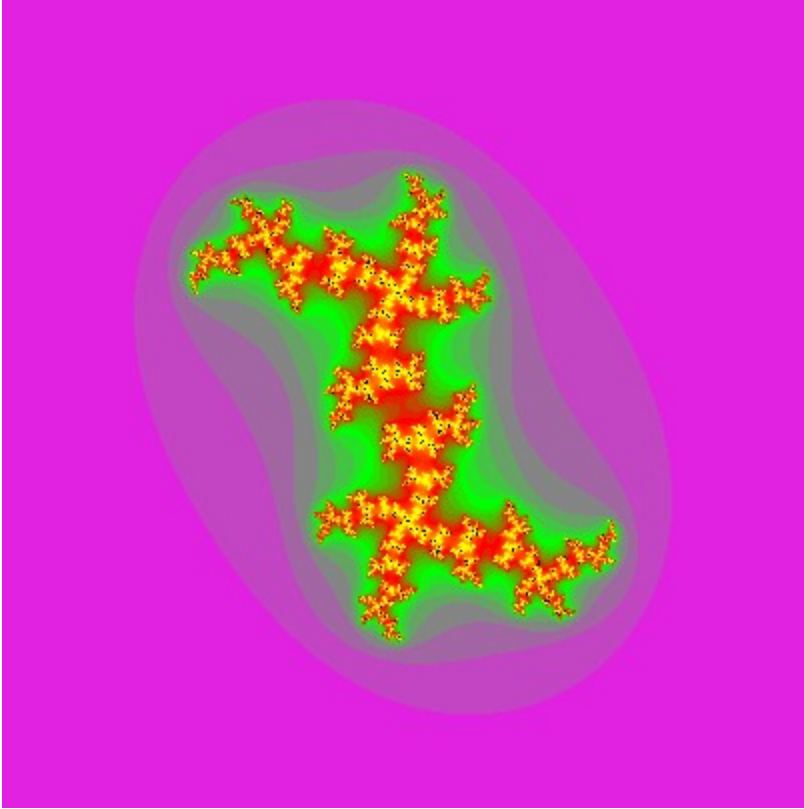
Pour les points à l'extérieur de l'ensemble, on attribue souvent une couleur selon le nombre d'itérations nécessaires pour que z_n atteigne l'infini. Ce nombre donne une idée de la vitesse à laquelle le point diverge. Les couleurs attribuées sont purement arbitraires et dépendent entièrement de l'effet artistique que l'on cherche à créer. Nous avons choisi ici de passer du jaune au violet, par les couleurs de l'arc-en-ciel.



Pour illustrer la complexité de cet objet, rapprochons-nous dans la zone du plan délimitée par les points $(-1.2, -0.3)$ et $(-1.1, 0.2)$. L'image de cette zone révèle des interconnexions entre les différents îlots de l'ensemble. On peut voir que des détails apparaissent à chaque nouvelle échelle.



La fractale de Julia constitue une variante simple de l'ensemble de Mandelbrot. La fonction devient $z_{n+1}=(z_n)^2+c$, où c est une constante complexe fixe pour tous les points de la région du plan que l'on veut traiter. Pour obtenir des résultats intéressants, c doit se situer à l'intérieur de l'ensemble de Mandelbrot, le plus près possible de la frontière entre l'intérieur et l'extérieur. Par exemple, voici la fractale de Julia si $c=0.3+0.6i$. Le même algorithme de détermination des couleurs que la fractale précédente a été utilisé.



Newton

La technique utilisée par Mandelbrot constitue la base de plusieurs autres types de fractales, entre autres celle de Newton. Contrairement à l'ensemble de Mandelbrot dans lequel l'infini agit comme un attracteur sur chaque point du plan, la fractale de Newton attire ces derniers vers des valeurs finies, réelles ou complexes, constituant les racines d'un polynôme.

Certains problèmes algébriques demeurent difficiles à résoudre, comme par exemple le calcul de la racine carrée d'un nombre quelconque. Par le calcul différentiel, il existe une méthode qui permet de résoudre ce type d'équations. On l'appelle la méthode de Newton en l'honneur de son inventeur, Isaac Newton.

Pour appliquer cette méthode, il faut tout d'abord poser le problème comme celui de la recherche des racines d'un polynôme. Par exemple, on peut exprimer \sqrt{t} comme suit: $f(x) = x^2 - t = 0$.

On définit x_0 comme une solution hypothétique à cette équation ou une approximation obtenue par une application précédente de la méthode. Chaque fois que nous appliquerons la méthode de Newton, le résultat, x , se rapprochera de plus en plus de la solution réelle. On calcule la valeur de $f(x)$ à un point qui semble proche de la solution et on ajoute à la valeur obtenue celle de la différentielle dy . Ce qui permet d'obtenir une approximation correcte si on se trouve suffisamment près de la racine. Puisque la fonction est égale à zéro par définition, on peut isoler la variable x comme suit.

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) * dx = f(x_0) + f'(x_0) * (x - x_0) = 0$$

$$f(x_0) = -f'(x_0) * (x - x_0)$$

$$x - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

On peut ainsi trouver x et répéter ce processus autant de fois que l'on le souhaite. Le nombre d'itérations déterminera ainsi la précision de l'approximation effectuée. Par exemple, prenons comme fonction la racine carrée de sept.

$$f(x) = x^2 - 7 = 0$$

On estime x_0 entre 2 et 3. Puisque $\sqrt{7}$ est plus près de $\sqrt{9} = 3$, que $\sqrt{4} = 2$, on choisit x_0

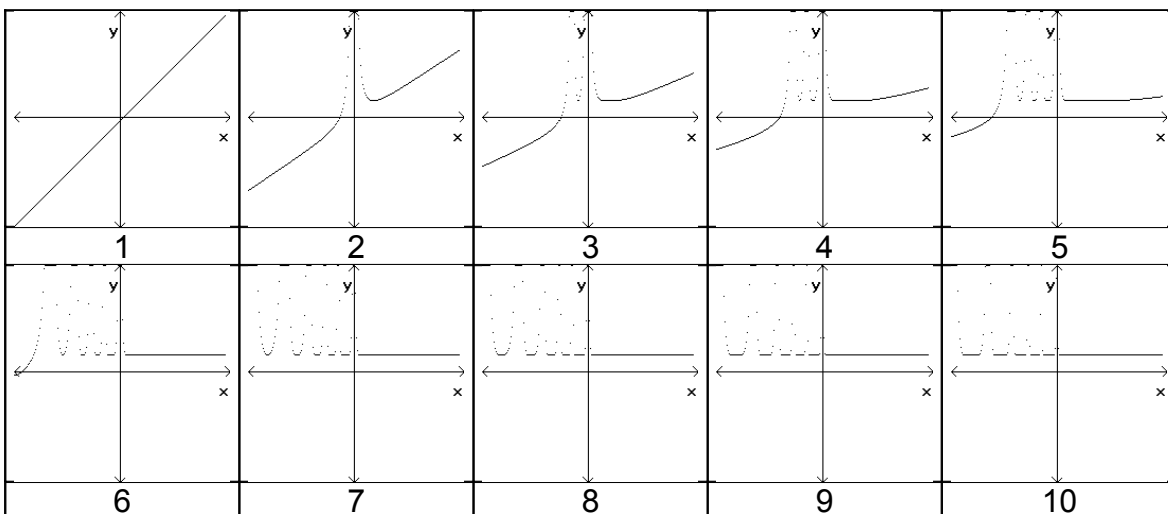
$$f'(x) = 2x$$

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x = x_0 - \frac{x_0^2 - 7}{2x_0} = \frac{2x_0^2 - (x_0^2 - 7)}{2x_0} = \frac{x_0^2 + 7}{2x_0}$$

Comme nous pouvons le voir dans le tableau ci-dessous, la solution converge assez rapidement vers une valeur qui est celle des racines carrées recherchées, et cela, pour plusieurs valeurs de départ.

Cette méthode n'est toutefois pas infaillible, car des oscillations se produisent avec des racines cubiques ou supérieures. Nous pouvons observer ce comportement graphiquement en utilisant la méthode de Newton pour plusieurs valeurs de départ. La coordonnée x constitue la valeur de départ choisie tandis que la coordonnée y représente l'estimation obtenue après n utilisations de la méthode. Nous obtiendrons n graphiques dans lesquels une droite oblique se transformera progressivement en droite horizontale.



Nous constatons, d'après les graphiques et le tableau, qu'un plus grand nombre d'itérations se produit avant d'atteindre la solution de cette racine. La valeur initiale de -10 n'a même pas mené à la solution après quinze itérations.

Pour comprendre ce phénomène étrange, il faut généraliser la méthode dans les nombres complexes, ce qui introduit plusieurs solutions pour une même équation. On sait par exemple que la racine d'un nombre compte autant de solutions, disposées autour d'un cercle, que le degré de cette racine. Dans le cas des racines carrées, les deux racines étaient réelles. La racine cubique introduit quant à elle deux solutions complexes qui ne pouvaient être représentées avec le graphique dans les réels.

On peut exprimer une fonction $f(z)$ comme $f(x,y)=R(x,y)+il(x,y)$, où $z=x+yi$. Dans ce cas, pour que $f(z)=0$, $R(x,y)=0$ et $I(x,y)=0$. Le point (x_0,y_0) constitue la valeur de départ pour la méthode. On peut approcher $R(x,y)$ et $I(x,y)$ par

$$R(x, y) \approx R(x_0, y_0) + dR = R(x_0, y_0) + \frac{\partial R}{\partial x} * (x - x_0) + \frac{\partial R}{\partial y} * (y - y_0) \text{ et}$$

$$I(x, y) \approx I(x_0, y_0) + dI = I(x_0, y_0) + \frac{\partial I}{\partial x} * (x - x_0) + \frac{\partial I}{\partial y} * (y - y_0) .$$

On peut démontrer que $x=x_0+h$ et $y=y_0+k$ si

$$h = \frac{\begin{vmatrix} -R & \frac{\partial R}{\partial y} \\ -I & \frac{\partial I}{\partial y} \end{vmatrix}_{(x_0, y_0)}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} \\ \frac{\partial I}{\partial x} & \frac{\partial I}{\partial y} \end{vmatrix}_{(x_0, y_0)}} \quad \text{et} \quad k = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial R}{\partial x} & -R \\ \frac{\partial I}{\partial x} & -I \end{vmatrix}_{(x_0, y_0)}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} \\ \frac{\partial I}{\partial x} & \frac{\partial I}{\partial y} \end{vmatrix}_{(x_0, y_0)}}.$$

Les variables h et k satisfont aux conditions suivantes.

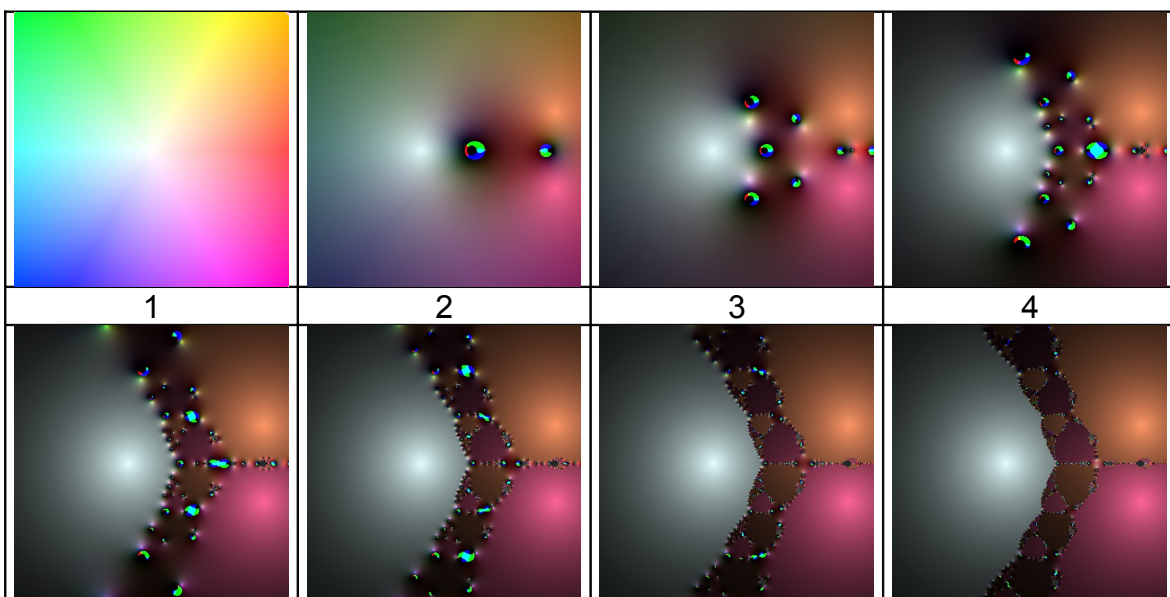
$$\begin{aligned} dR(x_0, y_0) &= R(x, y) - R(x_0, y_0) \\ \frac{\partial}{\partial x} R(x_0, y_0) * h + \frac{\partial}{\partial y} R(x_0, y_0) * k &= -R(x_0, y_0) \\ \frac{\partial}{\partial x} I(x_0, y_0) * h + \frac{\partial}{\partial y} I(x_0, y_0) * k &= -I(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Appliquons cette méthode pour une équation telle que $f(z) = z^3 - 3z^2 + 2z + 1$. Si on développe ce polynôme de degré 3, on obtient $R(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 3x^2 + 3y^2 + 2x + 1$ et $I(x,y) = 3x^2y - y^3 - 6xy + 2y$. On peut aussi calculer les quatre dérivées partielles. $R_x' = 3x^2 - 3y^2 - 6x + 2$, $R_y' = -6xy + 6y$, $I_x' = 6xy - 6y$ et $I_y' = 3x^2 - 3y^2 - 6x + 2$. Puisque développer les déterminants engendre une expression algébrique complexe et source d'erreurs, nous calculerons les dérivées partielles aux points à calculer pour ensuite calculer les déterminants avec les valeurs obtenues. Voici les dix premières itérations pour trois points qui convergent vers les trois solutions de cette équation.

Dans les réels, nous pouvons facilement estimer la solution entre deux racines connues, mais cette technique devient plus compliquée dans les nombres complexes. Une méthode s'avère nécessaire pour visualiser les racines, les dénombrer et les situer approximativement. La fractale de Newton, inventée par

John Hubbard, peut accomplir ce travail en représentant les racines de $f(z)$ comme des attracteurs. Dans cette fractale, chaque point est testé pour savoir vers quelle solution la méthode de Newton le fait converger. Une couleur est attribuée pour chaque solution.

Nous avons un peu modifié la méthode pour permettre de visualiser la formation de la fractale. Elle constitue une extension de la technique utilisée pour visualiser les racines dans les réels. Le graphe met en relation deux plans plutôt que deux points. Chaque point du plan complexe correspond à une valeur initiale et sa couleur détermine quelle valeur la méthode de Newton lui a attribuée après n itérations. Pour assigner la couleur, on utilise l'angle des coordonnées polaires de la solution pour déterminer une couleur de base sur la roue des couleurs. Plus la distance entre le point et l'origine est élevée, plus la couleur sera foncée et la brillance de la couleur dépend de la distance entre le point initial et la solution.



5	6	7	8
---	---	---	---

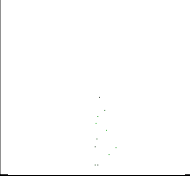
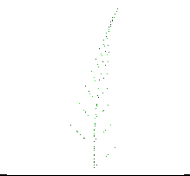
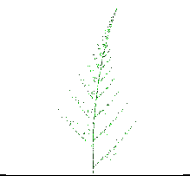
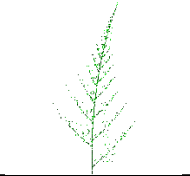


Si nous représentons ainsi notre polynôme, nous obtenons trois solutions symbolisées par trois zones colorées comme dans le tableau précédent. Chaque zone est délimitée par des motifs complexes dans lesquels s'entremêlent les trois couleurs. Plus on s'approche de l'origine, plus il faut un grand nombre d'itérations pour atteindre un attracteur.

Barnsley

Approche différente au problème des fractales introduite par Michael Barnsley, le système d'itération de fonctions (Iterated Function System ou IFS) découle directement de la propriété d'autosimilarité des fractales. Contrairement aux fractales dérivées de l'ensemble de Mandelbrot, la technique travaille sur les réels et ne traite que quelques points par opposition à toute une zone du plan complexe. Cette méthode peut engendrer un nombre quasiment illimité de formes de types variés, dont toutes celles de l'ensemble de Julia. L'idée consiste à prendre un nombre quelconque de points de départ et à leur faire subir des transformations géométriques de manière itérative. Pour obtenir des formes plus complexes, on utilise plusieurs ensemble de transformations auxquelles on attribue une probabilité qui déterminera la fréquence de cette transformation.

On pourrait croire que cette technique, appelée jeu du chaos, engendrera un amas de points sans signification, mais après un grand nombre d'itérations, on verra apparaître une forme structurée possédant un ordre déterminé. Voici,

par exemple, la progression de la fougère, la ligne inférieure du tableau indiquant le nombre d'itérations qui ont engendré l'image.

					
10	100	500	1000	5000	10000

Les transformations doivent être de type affine, c'est-à-dire qu'elles ne doivent pas déformer la figure initiale que pourraient former les points. Par exemple, si on prend quatre points formant un carré, la forme finale doit demeurer un carré, un rectangle ou un parallélogramme. Ces transformations regroupent les translations, les rotations, les mises à l'échelle et les inclinaisons.

Mathématiquement, on définit les transformations par une équation paramétrique donnant la valeur des coordonnées transformées en fonction des coordonnées initiales. Ces équations ressemblent à celles-ci.

$$\begin{aligned}x' &= a * x + b * y + c * z + j \\y' &= d * x + e * y + f * z + k \\z' &= g * x + h * y + i * z + l\end{aligned}$$

On peut aussi écrire ces équations sous la forme d'une matrice.

$$(x', y', z', 1) = (x, y, z, 1) * \begin{pmatrix} a & d & g & 0 \\ b & e & h & 0 \\ c & f & i & 0 \\ j & k & l & 1 \end{pmatrix}$$

La quatrième colonne n'effectue aucune transformation, elle ne permet que l'obtention d'une matrice carrée qui pourra éventuellement être inversée. Les

coefficients de cette colonne ne doivent pas être modifiés pour conserver la logique de l'équation.

Cette matrice permet de créer des fractales dans un espace à trois dimensions et les transformations effectuées s'avèrent un peu plus complexes. Par exemple, la rotation peut avoir lieu sur un nombre infini d'axes, non pas seulement sur un seul comme dans le plan. Pour obtenir des fractales en deux dimensions, on ignore simplement la ligne 3 et la colonne 3 de la matrice. La forme simplifiée pour la deuxième dimension s'écrit comme suit:

$$(x', y', 1) = (x, y, 1) * \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ e & f & 1 \end{pmatrix}$$

Nous nous limiterons ici à la forme bidimensionnelle de cette matrice de transformation. Chaque transformation géométrique peut être représentée par cette équation, y compris les composées de transformations. Pour éviter toute transformation, il suffit d'utiliser la matrice identité.

$$(x', y', 1) = (x, y, 1) * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1 * x + 0 * y + 0, 0 * x + 1 * y + 0, 1) = (x, y, 1)$$

Attribuer des valeurs non nulles à e et f entraîne une translation sur l'axe correspondant. Tout coefficient a et c autre que 1 engendrera une mise à l'échelle sur l'axe correspondant à la variable multipliée. Si un tel coefficient est négatif, une symétrie sur l'axe correspondant est obtenue. La modification des coefficients b et d de cette matrice engendre une inclinaison. En général, un coefficient sur la première colonne affecte l'abscisse et une variable sur la

deuxième colonne, l'ordonnée. Une rotation d'un angle quelconque peut de même être représentée. On peut démontrer, à l'aide de la multiplication des nombres complexes en coordonnées polaires, que la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

permet d'effectuer une rotation de θ dans le sens trigonométrique, donc antihoraire.

Maintenant, si on symbolise cette matrice par la lettre T et le vecteur correspondant au point à transformer par la lettre P , on obtient la forme simplifiée $P'=P*T$. Si on effectue plus d'une transformation, les unes à la suite des autres, on écrit $P'=(P*T_1)*T_2$. Ce qui peut aussi s'écrire $P'=P*(T_1*T_2)$ en raison de l'associativité de la multiplication matricielle. De même, si T^{-1} est la matrice inverse de T , on obtient $P'*T^{-1}=P*T*T^{-1}=P*I=P$. Ce qui montre que la réciproque d'une transformation constitue simplement la matrice inverse et la composée, la multiplication matricielle.

Grâce à cette méthode, le triangle de Sierpinski peut être représenté par le jeu du chaos. Partant de trois points formant le triangle initial, on choisit au hasard d'effectuer l'une des transformations suivantes.

1. La taille du triangle est divisée de moitié. Ce qui signifie que tous ses

points sont multipliés par $\frac{1}{2}$. Ce qui donne la matrice $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. La taille du triangle est divisée de moitié et la figure est décalée de $\frac{1}{2}$

unité vers le haut. La matrice $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ symbolise cette

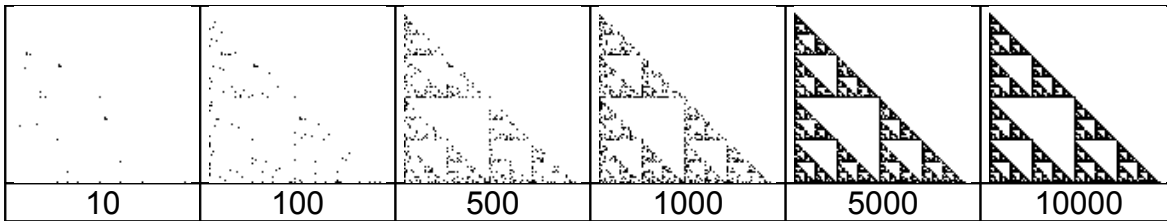
transformation.

3. La taille du triangle est diminuée et la figure est décalée de $\frac{1}{2}$ unité

vers la droite. Ce qui donne la matrice $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Le triangle n'est pas décalé en haut à droite, car cette translation créerait un triangle plein puisque tout l'espace intérieur des triangles serait rempli.

Puisque les transformations se font de manière aléatoire, il faut utiliser un grand nombre d'itérations pour voir apparaître un triangle. Chaque tracé de cette fractale sera différent des autres, à moins qu'on utilise un nombre infini d'itérations, ce qui est naturellement impossible. Nous pouvons voir que la précision de la fractale augmente avec le nombre d'itérations, comme dans le cas de la fougère.



Pour dessiner la fougère, forme un peu plus complexe, l'une des premières formes représentée par Barnsley, on utilise quatre jeux de transformations, c'est-à-dire quatre matrices de transformation. Le tableau suivant comprend les coefficients utilisés dans le tracé ainsi que la probabilité qu'a chaque transformation d'être appliquée. La somme de ces probabilités donne nécessairement un pour respecter la logique des statistiques.

Jeu de transformations	a	b	c	d	e	f	Probabilité
1	0	0	0	0.16	0	0	0.1
2	0.2	-0.26	0.23	0.22	0	1.6	0.08
3	-0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44	0.08
4	0.75	0.04	-0.04	0.85	0	1.6	0.74

À chaque jeu de transformations peut aussi être associée une couleur.

Dans le cas de la fougère, la couleur verte sera utilisée pour les quatre jeux.

Pour déterminer quel jeu de transformations choisir, un programme se servira d'un nombre aléatoire qui déterminera, en tenant compte des probabilités, quel jeu sera utilisé. Grâce à ce même nombre, on peut calculer un facteur qui modifiera, par multiplication, la couleur verte. Si on observe la fougère qui en résulte, on se rend compte qu'une petite branche ressemble fortement au tout.

Applications sociale et scientifique des fractales

Les fractales sont encore à l'état embryonnaire, mais il est tout de même possible de les appliquer soit dans les sciences ou soit dans la société. Étant donné le manque de recherche scientifique dans ce domaine, les domaines d'applications sont rares et très peu développés. Par contre, il a été possible de les associer à des phénomènes naturels. Par exemple, le système pulmonaire humain qui, ayant une structure de plus en plus ramifiée à mesure que l'on augmente la résolution, peut se traduire par une fractale. En effet, comme pour la courbe de Koch la surface totale des poumons semble très grande, car les poumons se décomposent de façon à maximiser leur surface dans un volume donné, on observe cela pour le système sanguin qui arrive à couvrir la totalité du corps sans toutefois occuper un volume considérable. Des recherches ont été faites pour essayer de faire un lien entre la rugosité du cerveau, sa dimension, et l'« intelligence » d'une personne.

Il y a aussi tout le domaine artistique qui permet de créer des images de grande qualité. Notons que ces images sont obtenues à partir de formules qui demandent moins d'espace de stockage informatique et c'est pourquoi récemment, Microsoft a réussi à produire sur un cédérom une encyclopédie de grande qualité. Nous pouvons grâce aux fractals représenter des végétaux, des nuages, des paysages, etc.

Conclusion

Mandelbrot invente donc une géométrie totalement révolutionnaire décrivant mieux les objets de la réalité. Ses recherches permettent la découverte de l'ensemble de Mandelbrot, la représentation de la méthode de Newton et son analyse et elles inspirent Barnsley dans ses recherches sur le jeu du chaos. La théorie des dimensions introduit, quant à elle, des nouvelles propriétés géométriques jusque-là inexplorées.

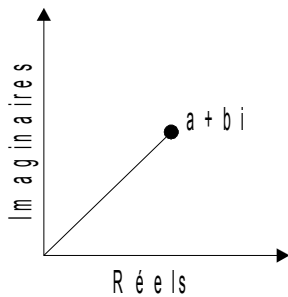
L'informatique permet un nouveau type de représentation géométrique qui n'était pas envisageable à l'époque de Euclide. Sa géométrie, qui constitue une abstraction mathématique, ne peut pas expliquer tous les phénomènes complexes du monde réel. Il devient nécessaire de fonder une nouvelle théorie, celle des fractales.

L'étude de tels objets en est toujours au stade descriptif, comme l'était la biologie avant le vingtième siècle. Cette théorie deviendra réellement intéressante lorsqu'il sera possible de modifier la réalité à partir des constats qu'elle permet de faire. Ces tentatives de changement pourraient remettre cette géométrie en question ou en révéler des aspects tout à fait nouveaux.

Annexes

Annexe I : les nombres complexes

Les nombres complexes constituent une extension des nombres réels donnant à chaque nombre une position sur le plan. L'axe des x correspond aux réels tandis que l'axe des y, aux nombres imaginaires. Un nombre complexe s'écrit sous sa forme cartésienne, $a+bi$, ou sous sa forme polaire, $r \text{ cis } \theta$. Dans cette dernière forme, r représente la distance entre le point et l'origine, et θ , l'angle entre la droite reliant l'origine et le nombre et la droite horizontale passant par l'origine. $\text{cis } \theta$ correspond au développement $\cos \theta + i \sin \theta$. i possède la valeur de $\sqrt{-1}$.



On peut additionner, soustraire, multiplier et diviser des nombres complexes comme on le fait avec les réels. On utilise alors les formules suivantes.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} \text{ (multiplication par la conjuguée)}$$

$$r \text{ cis}(\theta) * n \text{ cis}(\phi) = rn \text{ cis}(\theta + \phi)$$

$$r \text{ cis}(\theta) / n \text{ cis}(\phi) = r / n \text{ cis}(\theta - \phi)$$

$$(r \text{ cis}(\theta))^n = r^n \text{ cis}(n\theta) \text{ (théorème de Démoivre)}$$

$$\sqrt[n]{r \text{ cis}(\theta)} = r^{1/n} \text{ cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \text{ où } k = (0, 1, 2, \dots, n)$$

Ces opérations sont assez usuelles et, pour la plupart, simples à démontrer.

Nous nous intéresserons ici davantage aux opérations plus inhabituelles comme les fonctions transcendentes. Pour effectuer l'exponentielle d'un nombre complexe, on utilise la loi d'Euler qui stipule que $e^{i\theta} = \text{cis } \theta$. On peut démontrer cette loi en utilisant les séries de Maclaurin pour e^x , $\sin x$ et $\cos x$, et en remplaçant x par $i\theta$ dans la série de e^x . À partir de cette règle, nous pouvons démontrer que

$$e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^a * \text{cis } b$$

$$\ln(a+bi) = \frac{1}{2} \ln(a^2 + b^2) + i(\arctan(b/a) + 2k\pi) \text{ où } k \text{ est une valeur entière quelconque}$$

$$(a+bi)^{c+di} = e^{\ln(a+bi)*(c+di)} = (e^{\ln(a+bi)})^{c+di} = (a+bi)^{(c+di)}$$

En utilisant les séries de Maclaurin correspondantes et les identités trigonométriques, on peut aussi trouver les valeurs des fonctions trigonométriques sinus et cosinus sur des nombres complexes. \cosh et \sinh correspondent respectivement aux fonctions sinus et cosinus hyperboliques.

$$\sin(i\theta) = i \sinh(\theta)$$

$$\cos(i\theta) = \cosh(\theta)$$

$$\sin(a+bi) = \sin(a) * \cos(bi) + \sin(bi) * \cos(a) = \sin(a) * \cosh(b) + i \cos(a) * \sinh(b)$$

$$\cos(a+bi) = \cos(a) * \cos(bi) - \sin(a) * \sin(bi) = \cos(a) * \cosh(b) - i \sin(a) * \sinh(b)$$

Bibliographie

DEWDNEY, A., *Mandelbrot et Mandelbus*, Pour la science, n° 138, avril 1989, p. 100-103.

COSSETTE, Mario, *Une nouvelle géométrie : les fractals*, Spectre, 24, n° 4, avril-mai 1995, p. 31-32.

SAPOVAL, Bernard, *L'universalité des formes fractales*, Pour la science, n° 248, juin 1998, p. 40-42.

MANDELBROT, Benoît, *Les inattendus des fractales*, Pour la science, n° 234, avril 1997, p. 10-12.

Fractals for the Classroom, Springer-Verlag, New York, 1991

WEGNER Timothy et PETERSON, Mark, Fractal creations, Waite Group Press, 1991

CRILLY, Aj, Earnshaw R.A., Jones H., *Fractal and Chaos*, éd Springer-Verlag

GLEICK, James, La théorie du chaos, Champs Flammarion, New York, 1987, 431 p.

Fractals, <http://www.calweb.com/~bjohnson/fract.html>

http://www.maa.org/mathland/mathland_2_10.html

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Mandelbrot.html>, biographie de Mandelbrot

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Julia.html>, biographie de Gaston Julia

<http://www.swin.edu.au/astronomy/pbourke/fractals/fern>, informations sur la fougère

http://www.agnesscott.edu/aca/depts_prog/info/math/riddle/ifs/pentagon/pentagon.htm

<http://www.britannica.com/>

<http://about.com>

<http://library.thinkquest.org/3288/gnrte2.html>

<http://library.thinkquest.org/26242>